La Trasformata di Fourier

Data una funzione $f(x)$ appartenente alla classe delle funzioni a decrescenza rapida $S(\mathbb{R})$ (ovvero funzioni che, insieme alle relative derivate, tendono a zero più velocemente di qualsiasi potenza), definiamo trasformata di Fourier la funzione $\hat{f}(y) \in S(\mathbb{R})$ così definita:

$$F(f(x)) = \hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-2\pi i x y} dx$$

Ne segue che $F : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ ed esiste l'inversa, detta antitrasformata:

$$F^{-1}(\hat{f}(y)) = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, e^{2\pi i x y} dy$$

Espressioni equivalenti sono:

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x) \cdot dx \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \hat{f}(y) dy$$

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x) dx ; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \hat{f}(y) dy$$

Nel seguito si illustrano le proprietà di questo potente strumento matematico.

Proprietà 1: Linearità

La trasformata di Fourier è un operatore lineare:

$$F(\alpha f + \beta g) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)] \cdot e^{-2\pi i x y} dx = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x y} dx + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-2\pi i x y} dx = \alpha F(f(x)) + \beta F(g(x))$$

Proprietà 2: trasformazione equazioni algebriche - equazioni differenziali

Consideriamo la derivata della trasformata:

$$\frac{d}{dy} \hat{f}(y) = \frac{d}{dy} F(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-2\pi i x y} \cdot (-2\pi i x)\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dy^2} \hat{f}(y) = D^2 F(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-2\pi i x y} (2\pi i x)^2 dx$$

Pertanto, effettuando la derivazione p-esima:

$$D^p F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-2\pi i x y} \cdot (-2\pi i x)^p dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x y} [f(x) \cdot (-2\pi i x)^p] dx$$

$$= F(f(x) \cdot (-2\pi i x)^p), \ p \in \mathbb{R}$$ (si calcolano anche le derivate frazionarie)

$$\Rightarrow D^p F(f(x)) = (-2\pi i)^p \ F(f(x) \cdot x^p) \Rightarrow D^p F = (-2\pi i)^p \cdot F x^p$$

L'ultima espressione è valida per qualunque f, cioè F indica l'operatore di integrazione senza specificare la sua applicazione ad f. Cerchiamo $F \cdot D^p$:

$$D^p F \cdot \cancel{F^{-1}} = (-2\pi i)^p F x^p \cdot F^{-1} \Rightarrow F^{-1} \cdot D^p = (-2\pi i)^p \cdot \cancel{F^{-1} \cdot F} \cdot x^p \cdot F^{-1}$$

Ma, differendo F e F^{-1} solo per i e $-i$, si può scrivere:

$$F \cdot D^p = (+2\pi i)^p \cdot x^p \cdot F$$

La trasformata di Fourier trasforma derivate in potenze e viceversa.

Proprietà 3: trasformata e Gaussiana

La funzione di Gauss $f(x)=e^{-x^2}$ può comparire sia in una che in due dimensioni e porta alla definizione dei seguenti integrali:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

In coordinate polari:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \qquad dS=r\,d\theta\,dr \Rightarrow I^2=\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^{\infty}e^{-r^2}r\,dr=$$

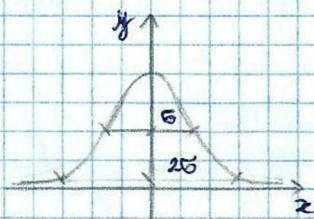
$$=\pi\left[-e^{-r^2}\right]_0^{\infty}=\pi \Rightarrow I=\sqrt{\pi}$$

Abbiamo così ricavato il valore dell'integrale non elementare. Prima di applicare la trasformata alla gaussiana esaminiamo meglio quest'ultima:

$$f(x)=e^{-\alpha x^2} \Rightarrow f'(x)=-2\alpha x\cdot e^{-\alpha x^2} \Rightarrow f''(x)=e^{-\alpha x^2}(-2\alpha+4\alpha^2x^2)$$

$$\Rightarrow 4\alpha^2x^2-2\alpha=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2\alpha} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

Definiamo $\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$ la distanza tra massimo e flesso. Essa è anche detta semilarghezza della gaussiana (la larghezza è 2σ) o deviazione standard. σ^2 è la varianza:



Entro σ sta il 68% della Gaussiana, entro 2σ il 99%. Poniamo $z=x\sqrt{\alpha}$, $dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}dz$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}\frac{dz}{\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Possiamo quindi normalizzare $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ per ottenere la Gaussiana di area unitaria: $f(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

Applichiamo finalmente la trasformata:

$$F(e^{-\alpha x^2})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi i xy}\cdot e^{-\alpha x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\left(x^2+\frac{2\pi i y}{\alpha}x+\frac{\pi^2i^2y^2}{\alpha^2}-\frac{\pi^2i^2y^2}{\alpha^2}\right)}dx=$$

Abbiamo completato il quadrato con $\beta=\frac{\pi i y}{\alpha}$:

$$F(e^{-\alpha x^2})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha(x+\beta)^2}\cdot e^{\alpha\beta^2}dx=e^{\alpha\beta^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha(x+\beta)^2}dx$$

Se $x+\beta=z$, $dx=dz$:

$$F(e^{-\alpha x^2})=e^{\alpha\beta^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha z^2}dz=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot e^{-\alpha\frac{\pi^2y^2}{\alpha^2}}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot e^{-\frac{\pi^2y^2}{\alpha}}$$

Quindi la trasformata di Fourier trasforma gaussiane in gaussiane. Il legame è dato dalle deviazione standard:

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \qquad \sigma_F=\frac{1}{\sqrt{2(\pi^2/\alpha)}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}\pi}=\frac{\sqrt{2\alpha}}{2\pi}=\frac{1}{2\pi\sigma} \Rightarrow \sigma\cdot\sigma_F=\frac{1}{2\pi}$$

Le due deviazioni standard sono legate da proporzionalità inversa: a σ piccola corrisponderà una σ_F grande (da Gaussiana "stretta" a Gaussiana "larga"); a σ grande una σ_F piccola (da Gaussiana "larga" a Gaussiana "stretta"). Esisterà quindi anche una Gaussiana che, trasformata, rimane se stessa!

$$\sigma = \sigma_F \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \Leftrightarrow \alpha = \pi$$

Ovvero $F(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi y^2}$, autofunzione con $\lambda = 1$ $(F(e^{-\pi x^2}) = 1 \, e^{-\pi y^2})$.

Proprietà 4: prodotto di convoluzione

Date due funzioni f e g, si definisce prodotto di convoluzione l'integrale seguente (f e g a decrescenza rapida, $f, g \in S(\mathbb{R})$):

$$(f * g)(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cdot g(x-z) \, dz$$

Applichiamo la trasformata di Fourier:

$$F(f(x)) * F(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x y} f(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i z y} g(z) \, dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x y} \cdot e^{-2\pi i z y} f(x) \cdot g(z) \, dx \, dz$$

Poniamo $q = x + z \Rightarrow x = q - z$, $dx = dq$:

$$F(f(x)) * F(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(q-z) \cdot g(z) \cdot e^{-2\pi i y q} dq \, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i q y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(q-z) g(z) \, dz \right] dq =$$

$$= F(f * g)$$

Abbiamo così ottenuto la trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione. Posta inoltre $u = Ff$ e $v = Fg$ (cioè $f = F^{-1} u$ e $g = F^{-1} v$):

$$F(F^{-1} u * F^{-1} v) = uv \Rightarrow F^{-1} F(F^{-1} u * F^{-1} v) = F^{-1}(uv)$$

$$\Rightarrow F^{-1} u * F^{-1} v = F^{-1}(uv) \Leftrightarrow Fu * Fv = F(uv)$$

Si può applicare anche l'antitrasformata alla convoluzione.

Proprietà 5: trasformata e δ di Dirac

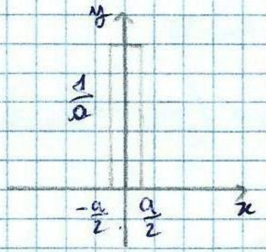
Come abbiamo già fatto per la Gaussiana, approfondiamo il concetto di δ di Dirac prima di applicare la trasformata. Consideriamo la funzione g e il seguente integrale:

$$\begin{cases} g(x) = 0 \quad \forall x \neq 0 \\ g(0) = k \end{cases} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx = 0$$

Ci chiediamo se esista una funzione $g(x)$ con valore così elevato in 0 da far emergere dall'integrale che contiene il suo prodotto con $f(x)$ il valore che quest'ultima ha in zero, essendo g nulla altrove. In realtà non esiste, ma Dirac introdusse ugualmente una $\delta(x)$ tale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdot f(x) = f(0)$$

Tale δ è tuttavia accettabile interpretandola come un funzionale, ovvero come operatore che restituisce il valore di una funzione per una certa x.
Il concetto di δ è assimilabile a un rettangolo di area unitaria in cui la base tende a zero e l'altezza a infinito:



$A=1 \quad f\in C^0(\mathbb{R}) \quad g_a(x)$ funz. rett.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot g_a(x)\,dx = \int_{-a/2}^{a/2} f(x)\cdot\frac{1}{a}\,dx = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\,dx = f(c)$$

Per il teorema del valor medio $\left(\exists\, c \in \left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right) \text{ t.c. } \bar f = f(c)\right)$.
Eseguendo il limite:

$$\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot g_a(x)\,dx = \lim_{a\to 0} f(c) = f(0)$$

Invertiamo, in modo non del tutto lecito, il limite con l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{a\to 0} g_a(x)\, f(x)\,dx = f(0) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\, f(x)\,dx = f(0)$$

Interpretiamo il limite come δ di Dirac. Applichiamo la trasformata:

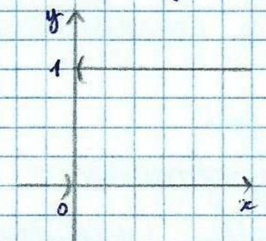
$$F(\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x y}\,\delta(x)\,dx = e^0 = 1 \Rightarrow F(\delta)=1 \Rightarrow \delta = F^{-1}(1) \Rightarrow F(1)=\delta$$

La δ di Dirac è una Gaussiana infinitamente stretta, quindi la sua trasformata è una Gaussiana infinitamente larga (e viceversa, anche se 1 non è a decrescenza rapida):

$$F(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x y}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(2\pi x y)\,dx + \cancel{i\int_{-\infty}^{+\infty}\text{sen}(2\pi x y)\,dx} =$$

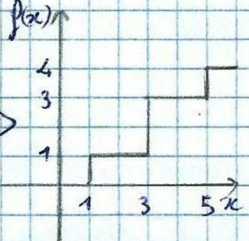
$$= 2\int_0^{\infty}\cos(2\pi x y)\,dx = 2\,\frac{\text{sen}(2\pi x y)}{2\pi y}\Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\text{sen}(2\pi x y) = \delta(y)$$

Il limite del seno non esiste ed è pari alla Dirac. Dalla Dirac nasce infine la funzione a gradino di Heaviside che consente di derivare funzioni non derivabili con l'analisi classica:



$$H(y) = \int_{-\infty}^{y}\delta(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } y<0 \\ 1 & \text{se } y>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x=0 \\ 1 & \text{se } x>0 \end{cases} \Rightarrow$$



$H'(x) = \delta(x)$

$f'(x) = \delta(x-1) + 2\delta(x-3) + \delta(x-5)$

Concluse le proprietà della trasformata, evidenziamo che, potendo scomporre ogni funzione in una parte pari e in una dispari $\left(f(x) = f_P(x) + f_D(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}\right)$ si ha:

$$F(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x y} f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty}\cos(2\pi x y)\, f_P(x)\,dx + 2i\int_0^{+\infty}\text{sen}(2\pi x y)\, f_D(x)\,dx =$$

$$= F_C(f_P) + i\,F_S(f_D)$$

Sono nulli gli integrali di funzione pari per funzione dispari (sen con f_P o cos con f_D).
Se ne deduce che $F_C = F_C^{-1}$ e $F_S = F_S^{-1}$.